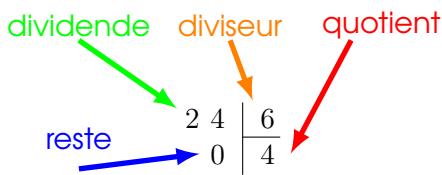




CHAPITRE 17 : NOMBRES PREMIERS

I DIVISEURS D'UN ENTIER

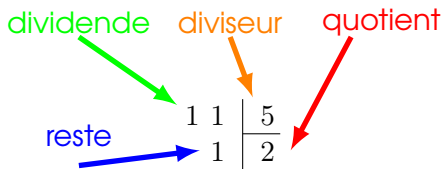


Considérons la division euclidienne de 24 par 6 posée à gauche. Le reste de cette division est 0.

$$24 = 6 \times 4 + 0 = 6 \times 4$$

On dit alors que 6 *divise* 24 et que 24 est un *multiple* de 6.

Considérons la division euclidienne de 11 par 5 posée à gauche.



$$11 = 5 \times 2 + 1$$

Le reste de la division euclidienne de 11 par 5 n'est pas nul car il vaut 1. Autrement dit, il n'existe pas d'entier q tel que $5 \times q = 11$.

On dit alors que 5 *ne divise pas* 11 et que 11 *n'est pas un multiple* de 5.

DÉFINITION

- On dit qu'un nombre entier non nul d *divise* un nombre entier n si le reste de la division euclidienne de n par d est nul, autrement dit, s'il existe un nombre entier q tel que : $n = q \times d$.
- On dit alors que d est un *diviseur* de n .
- On dit inversement que n est un *multiple* de d ou que n est *divisible* par d .
- On dit qu'un nombre entier est un *diviseur commun* de deux autres nombres entiers s'il divise chacun de ces deux entiers.

EXEMPLES

- 2 est diviseur commun de 8 et de 26 car $8 = 2 \times 4$ et $26 = 2 \times 13$.
- En revanche, 3 n'est pas un diviseur commun de 18 et 25 car 3 ne divise pas 25.

PROPRIÉTÉS **Rappels des critères de divisibilité vus en sixième.**

- 1) Un entier est divisible par 2 si et seulement si le chiffre de ses unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- 2) Un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est multiple de 3.
- 3) Un entier est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est multiple de 4.
- 4) Un entier est divisible par 5 si et seulement si le chiffre de ses unités est 0 ou 5.
- 5) Un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est multiple de 9.
- 6) Un entier est divisible par 10 si et seulement si le chiffre de ses unités est 0.

MÉTHODE

Pour déterminer la liste complète des diviseurs d'un entier, on le décompose en produits de facteurs en commençant avec 1, puis en essayant successivement avec 2, 3, etc. jusqu'à retrouver un produit déjà écrit. La liste des diviseurs est donnée par la liste de tous les facteurs trouvés.

EXEMPLE

$$35 = 1 \times 35$$

$$35 = 5 \times 7$$

$$35 = 7 \times 5$$

Les diviseurs de 35 sont :

1, 5, 7 et 35

$$24 = \dots \times \dots$$

$$24 = \dots \times \dots$$

$$24 = \dots \times \dots$$

$$24 = \dots \times \dots$$

$$24 = \dots \times \dots$$

Les diviseurs de 24 sont :

$$100 = \dots \times \dots$$

$$100 = \dots \times \dots$$

$$100 = \dots \times \dots$$

$$100 = \dots \times \dots$$

$$100 = \dots \times \dots$$

Les diviseurs de 10 sont :

II NOMBRES PREMIERS ET CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNE

DÉFINITION

- On dit qu'un nombre entier est *premier* s'il possède exactement deux diviseurs.
- Si un nombre différent de 1 n'est pas premier, on dit qu'il est *composé*.

EXEMPLES

- Il y a une infinité de nombres premiers (théorème admis).
- Le nombre 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur, à savoir lui-même.
- Par contre, les nombres 2, 3 et 5 sont des nombres premiers.
- En revanche, 6 n'est pas premier car il possède 4 diviseurs, à savoir les nombres 1, 2, 3 et 6.

REMARQUE

Ératosthène (-276 à -194) est un savant grec ayant pratiqué l'astronomie, la géographie, les mathématiques et la philosophie.

Sa renommée est due à la méthode qu'il employa pour mesurer la circonférence de la Terre en comparant les angles formés par des ombres à des emplacements distants.

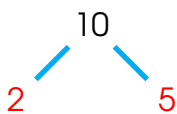
Il est aussi l'auteur d'un crible (test) pour déterminer la liste des 1ers nombres premiers. Ce crible consiste à parcourir la liste de nombres entiers en éliminant progressivement les multiples d'un nombre donné. Il ne reste finalement dans la liste que les nombres qui sont premiers.



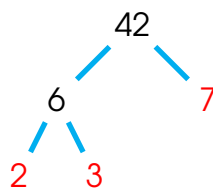
| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

- 1) On part de la case en haut à gauche et on progresse en avançant dans l'ordre croissant des nombres. On passera au surligneur rose les nombres qui ne sont pas premiers et vert ceux qui sont premiers.
- 2) Passer en rose le nombre 1, qui n'est pas premier.
- 3) Passer en vert 2, qui est premier. Passer en rose tous les autres multiples de 2.
- 4) Passer en vert 3, qui est premier. Passer en rose tous les autres multiples de 3.
- 5) Continuer ainsi de suite.
- 6) On remarquera qu'on peut s'arrêter à 10, parce que tous les multiples inférieurs à 10×10 ont déjà été éliminés.

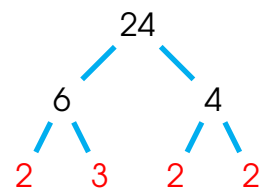
III DÉCOMPOSITION D'UN ENTIER EN PRODUIT DE FACTEURS PREMIERS



$$10 = 2 \times 5$$



$$42 = 2 \times 3 \times 7$$



$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

I DIVISEURS D'UN ENTIER

01 Compléter les tableaux ci-dessous en les remplissant avec tous les entiers de 1 à 9 de telle manière que les produits en ligne ou en colonne de trois de ces nombres donnent les résultats inscrits en fin de ligne ou de colonne.



| | | | |
|----|----|----|-----|
| | | | 6 |
| | | | 120 |
| | | | 504 |
| 84 | 90 | 48 | |

| | | | |
|---|-----|-----|-----|
| | | | 162 |
| | | | 64 |
| | | | 35 |
| 6 | 168 | 360 | |

| | | | |
|----|----|-----|-----|
| | | | 126 |
| | | | 80 |
| | | | 36 |
| 24 | 56 | 270 | |

02 Dans le tableau ci-contre, indiquez pour chacun des nombres notés en lignes s'il est ou non divisible par chacun des nombres donnés en colonnes. Marquez un « O » pour « est divisible » et un « N » pour « n'est pas divisible ».

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 9 | 10 | 15 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| 732 | | | | | | | | | |
| 595 | | | | | | | | | |
| 1417 | | | | | | | | | |
| 607 | | | | | | | | | |

03 Écrire dans le cahier d'exercices la liste de tous les diviseurs des nombres :
1) 13 **2)** 48 **3)** 64 **4)** 85 **5)** 105 **6)** 167 **7)** 1005

04 Déterminer un nombre entier à trois chiffres divisible à la fois par 2, par 3 et par 5 ;

05 Déterminer un nombre entier à trois chiffres divisible à la fois par 2 et par 9, mais pas par 5.

06 Déterminer un nombre entier à trois chiffres ni divisible par 3 ni divisible par 2.

07 Si un nombre est divisible par 2, l'est-il aussi par 4 ? Justifier dans le cahier d'exercices.

08 Si un nombre est divisible par 9, l'est-il aussi par 3 ? Justifier dans le cahier d'exercices.

09 Si un nombre est divisible à la fois par 2 et 4, l'est-il aussi par 8 ? Justifier dans le cahier d'exercices.

10 Cocher la bonne réponse :

| | |
|---|--|
| 1 Tout entier est divisible par 1. <input type="checkbox"/> Vrai <input type="checkbox"/> Faux | 2 Tout entier est divisible par lui-même. <input type="checkbox"/> Vrai <input type="checkbox"/> Faux |
| 3 Tout entier est divisible par au moins 2 nombres. <input type="checkbox"/> Vrai <input type="checkbox"/> Faux | 4 Tout entier autre que 1 a au moins deux diviseurs. <input type="checkbox"/> Vrai <input type="checkbox"/> Faux |
| 5 Il y a des entiers autres que 2 qui ont seulement 2 diviseurs. <input type="checkbox"/> Vrai <input type="checkbox"/> Faux | 6 Il existe un entier qui n'est divisible que par lui-même. <input type="checkbox"/> Vrai <input type="checkbox"/> Faux |