



CHAPITRE 8 : FONCTIONS AFFINES

I DÉFINITION ET VOCABULAIRE

DÉFINITION On appelle *fonction linéaire* toute fonction de la forme $f : x \mapsto ax$ où a est un nombre non nul. Le nombre a est appelé le *coefficient directeur* de la fonction linéaire.

EXEMPLES

Programme de calculs :	« Choisir un nombre. Le multiplier par -4. »	« Choisir un nombre. Le multiplier par 2. Multiplier le résultat par 3. »	« Choisir un nombre. Lui additionner 2. »	« Choisir un nombre. Le multiplier par lui-même. »
Fonction :	$f : \mapsto \dots\dots\dots$	$f : \mapsto \dots\dots\dots$	$f : \mapsto \dots\dots\dots$	$f : \mapsto \dots\dots\dots$
Nature de la fonction :				

REMARQUES

- Une fonction linéaire exprime une situation de proportionnalité entre la variable et son image.
- Réciproquement, toute relation de proportionnalité entre deux grandeurs peut-être exprimée sous la forme d'une fonction linéaire.
- En conséquence, l'image de 0 par une fonction linéaire est toujours égale à 0 car $f(0) = a \times 0 = 0$.

DÉFINITION On appelle *fonction affine* toute fonction de la forme $f : x \mapsto ax + b$ où a et b sont deux nombres et où a n'est pas nul. Le nombre a est appelé coefficient directeur et le nombre b l'ordonnée à l'origine.

EXEMPLES

Programme de calculs :	« Choisir un nombre. Le multiplier par -2. Ajouter 3 au résultat. »	« Choisir un nombre. Lui additionner 3. Multiplier le résultat par 5. »	« Choisir un nombre. Le multiplier par 0. Additionner 5 au résultat. »	« Choisir un nombre. Lui soustraire 3. Multiplier le résultat par le nombre de départ. »
Fonction :	$f : \mapsto \dots\dots\dots$	$f : \mapsto \dots\dots\dots$	$f : \mapsto \dots\dots\dots$	$f : \mapsto \dots\dots\dots$
Nature de la fonction :				

PROPRIÉTÉ Si une fonction est linéaire, alors elle est affine (d'ordonnée à l'origine 0). En revanche, la réciproque est généralement fausse : une fonction affine n'est pas nécessairement linéaire.

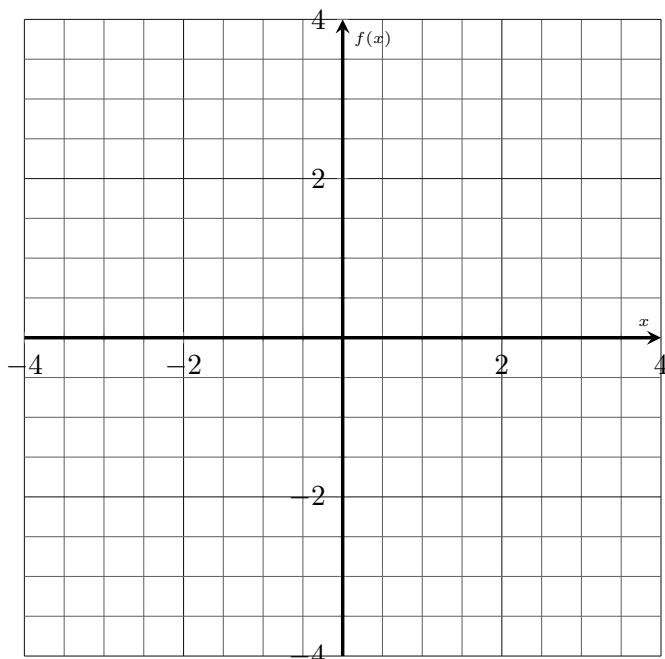
II REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DE FONCTIONS LINÉAIRES

PROPRIÉTÉ Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a est une droite passant par l'origine du repère.

EXEMPLE Pour tracer la représentation graphique de la fonction linéaire $f : x \mapsto 1,5x$:

- On trace un repère, on y place les unités, l'origine « O ». On annote « x » l'axe des abscisses (axe horizontal) et « $f(x)$ » l'axe des ordonnées (vertical).
- On cherche un autre point de la droite représentant la fonction. Pour cela, on calcule l'image par f d'une valeur de x comprise entre -4 et 4. Choisissons la valeur $x = -2$:

$$f(-2) = 1,5 \times (-2) = -3$$
- Donc le point M(-2,-3) est sur la droite qui représente la fonction f .
- On termine en traçant la droite (OM).



III REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DE FONCTIONS AFFINES

L'idée générale est que pour représenter une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$, il suffit de tracer la droite représentant la fonction linéaire $f : x \mapsto ax$ en la décalant de b unités sur les ordonnées. En effet :

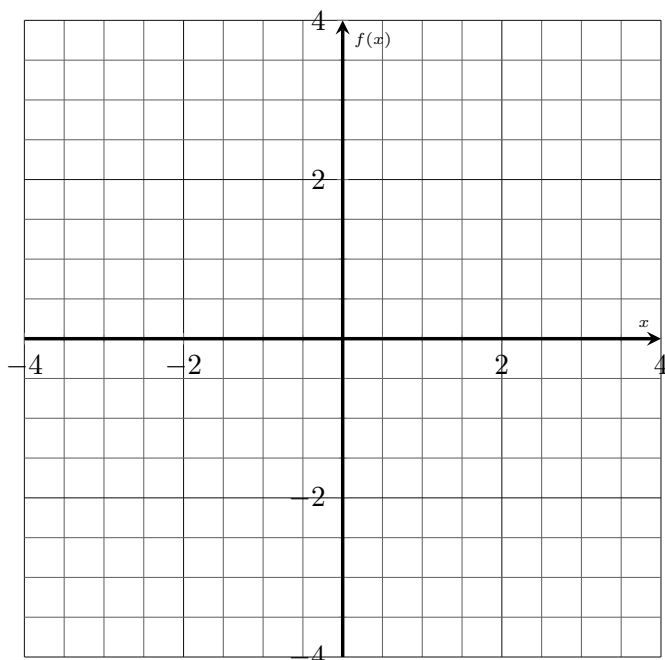
Valeurs de x :	-3	-2	-1	0	1	2	3
Image de x par $g : x \mapsto 1,5x$:	...	...	...	...	...	...	...
Image de x par $f : x \mapsto 1,5x + 2$:	...	...	...	...	...	...	...

PROPRIÉTÉ Dans un repère, la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite passant par le point de coordonnées $(0; b)$.

EXEMPLE Pour représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto 1,5x + 2$, on peut procéder ainsi :

- On constate que f est une fonction affine, donc qu'elle est représentée par une droite passant par le point A(0; 2).
- On cherche les coordonnées d'un autre point en choisissant une autre valeur pour x et on calcule l'image de cette valeur par la fonction.

$$f(-2) = 1,5 \times (-2) + 2 = -3 + 2 = -1.$$
- On place les deux points A(0; 2) et B(-2; -1) puis on trace la droite (AB).



IV INTERPRÉTATIONS GRAPHIQUES

On a tracé dans le repère ci-contre la droite représentant la fonction affine $f : x \mapsto 2x + 1$.

Cette droite passe par les points A, B et C.

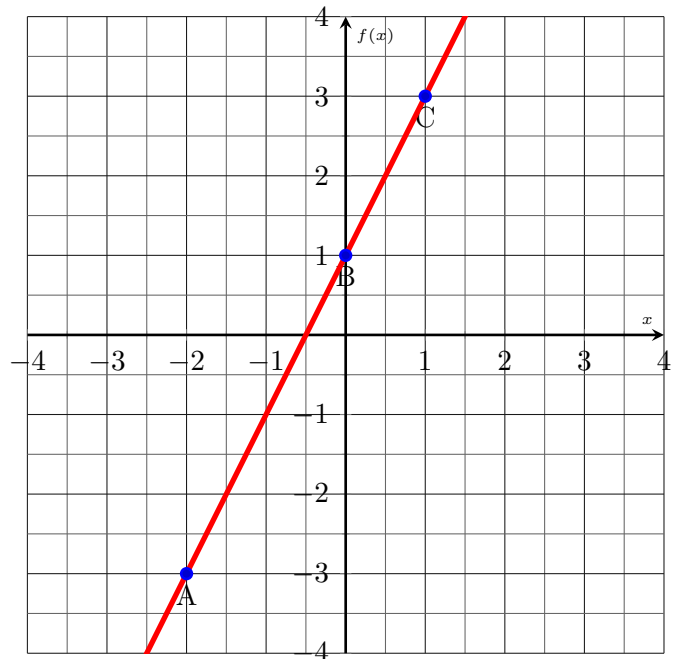
Complétez le tableau ci-dessous :

Point :	A	B	C
Abscisse :	$x_A = \dots$	$x_B = \dots$	$x_C = \dots$
Ordonnée :	$y_A = \dots$	$y_B = \dots$	$y_C = \dots$

Calculez :

- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dots$
- $\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dots$
- $\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dots$

Que constate-t-on ?



PROPRIÉTÉ

Le coefficient directeur a d'une fonction affine peut être obtenu par lecture graphique, de deux façons différentes :

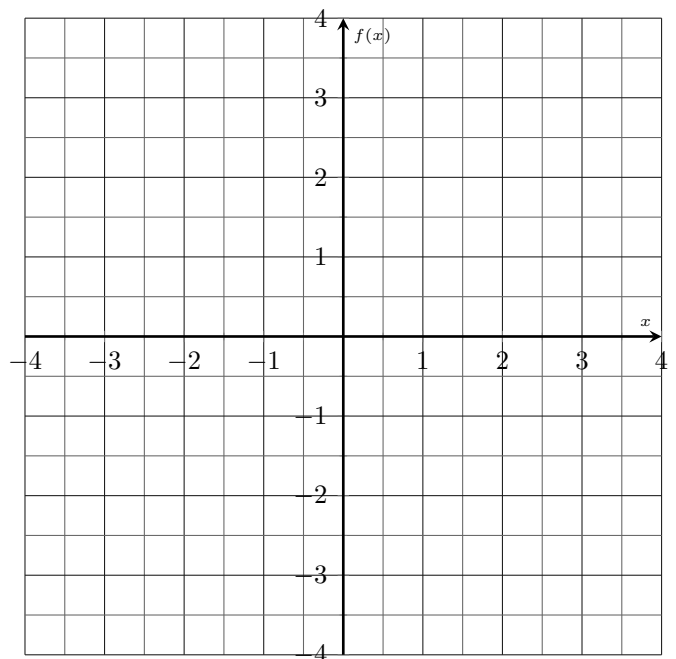
- La valeur a est l'image du nombre 1 par la fonction f car $f(1) = 1 \times a = a$.
- La valeur a est égale au quotient de la différence des ordonnées de deux points de la représentation graphique de la fonction par la différence de leurs abscisses.

Autrement dit, si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de la représentation graphique d'une fonction affine de coefficient directeur a , alors $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

EXEMPLE

Pour tracer la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto \frac{2}{3}x - 1$

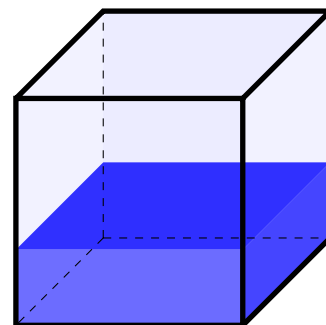
- Sachant qu'il s'agit d'une fonction affine, elle est représentée par une droite. Il s'agit donc de placer deux points puis de les relier.
- On commence par utiliser l'ordonnée à l'origine en plaçant le point $A(0; -1)$.
- Ensuite, on utilise la valeur du coefficient directeur $\frac{2}{3}$ afin de déterminer un deuxième point.
 - La différence de l'ordonnée du point A par l'ordonnée d'un autre point de la droite étant égale à 2, on part du point A et on monte de 2 unités.
 - La différence de l'abscisse du point A par l'abscisse d'un autre point étant égale à 3, on avance de 3 unités vers la droite. On obtient le point $B(3; 1)$.
- On termine en traçant la droite (AB).



I ACTIVITÉS D'INTRODUCTION AUX FONCTIONS LINÉAIRES ET AFFINES

01 Un réservoir de fuel a la forme d'un cube de 20 dm de côté.

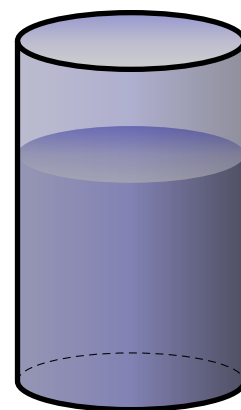
- 1) Calculer, d'abord en m^3 puis en litres, le volume maximal de fuel que peut contenir ce réservoir. On rappelle que $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litre}$.
- 2) On déverse du fuel à différentes hauteurs du réservoir. Compléter le tableau ci-dessous.
- 3) Est-ce un tableau de proportionnalité ? Justifier.
- 4) Compléter le premier des trois repères avec les valeurs obtenues dans le tableau.



Hauteur du fuel en mètres	0	2,5	5	10	15	20	h
Volume de fuel en litres							

02 Un réservoir de fuel à la forme d'un cylindre de 20 dm de diamètre et de 20 dm de hauteur, posé comme indiqué ci-contre.

- 1) Calculer la valeur arrondie à 1 litre près du volume maximal de fuel que peut contenir ce réservoir.
- 2) On déverse du fuel à différentes hauteurs du réservoir. Compléter le tableau ci-dessous en arrondissant au litre près.
- 3) Est-ce un tableau de proportionnalité ? Justifier.
- 4) Compléter le deuxième repère avec les valeurs du tableau.



Hauteur du fuel en dm	0	2,5	5	10	15	20	h
Volume de fuel en litres							

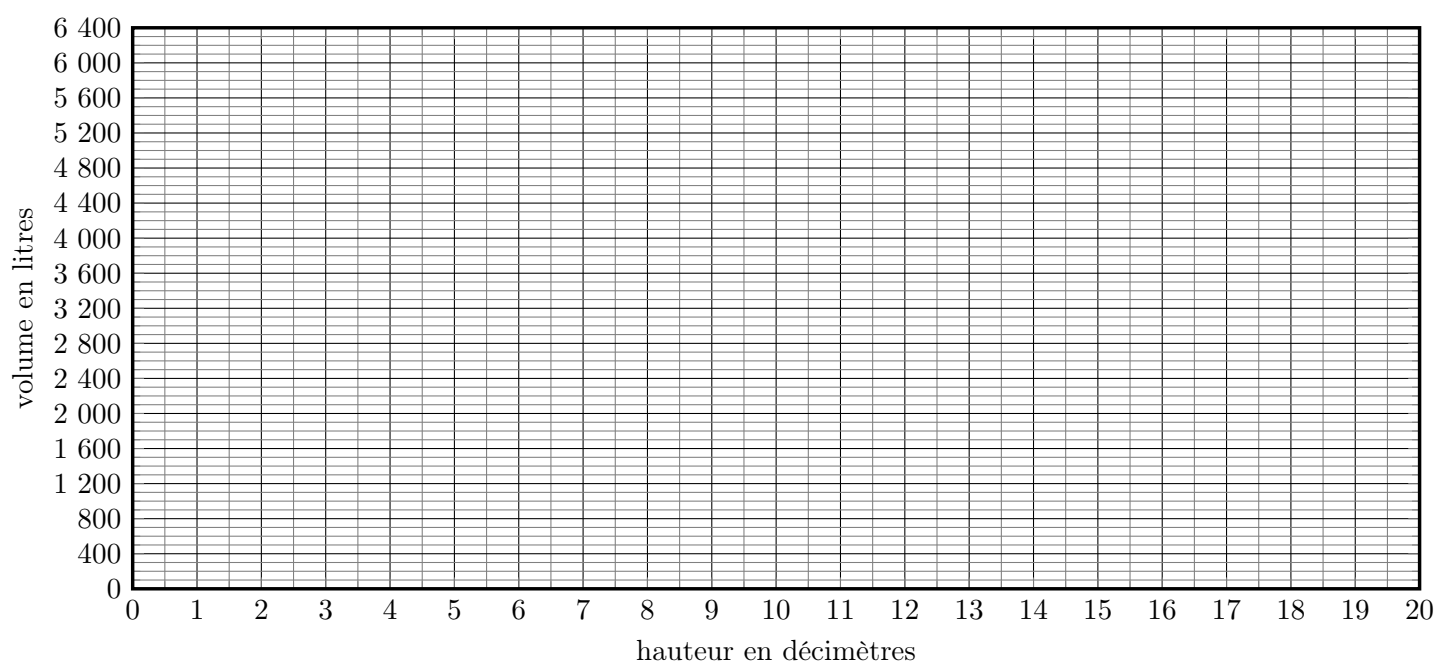
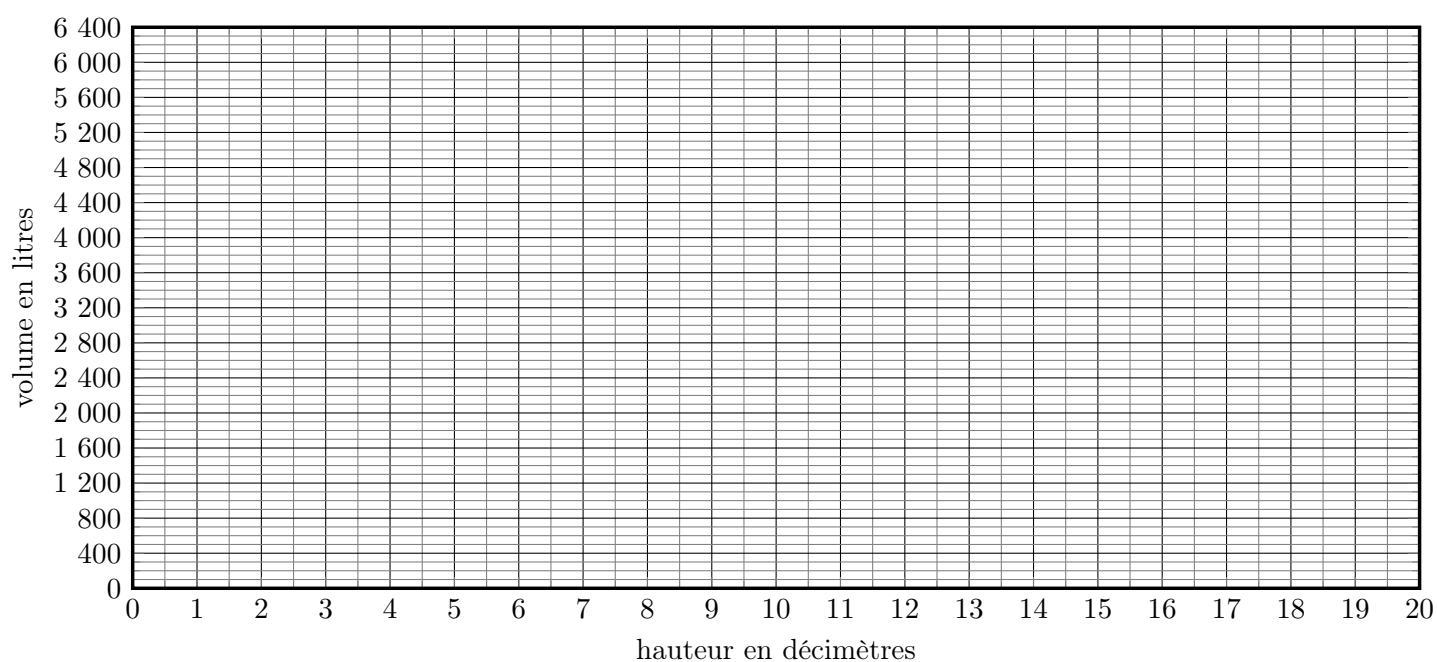
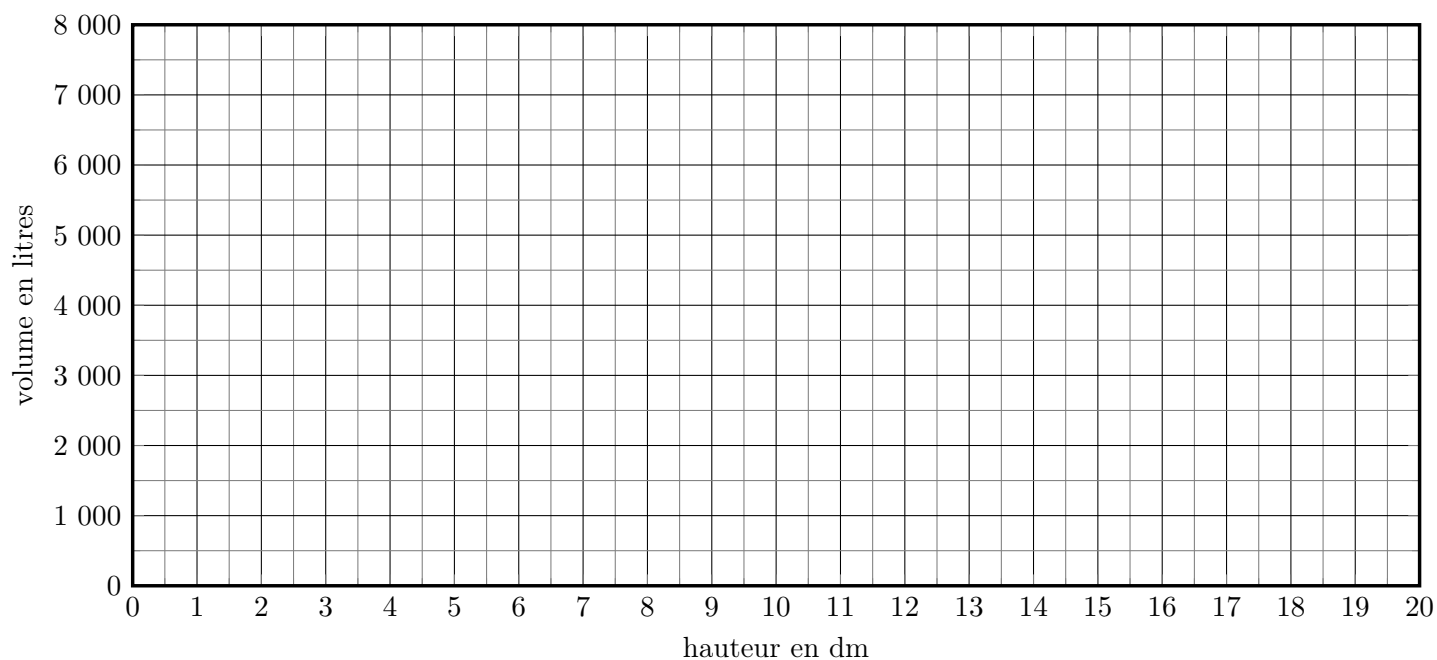
03 Le réservoir de l'exercice précédent est maintenant posé comme indiqué ci-contre. On donne, dans le tableau ci-dessous, le volume de fuel en fonction de sa hauteur dans le réservoir.

- 1) S'agit-il d'un tableau de proportionnalité ? Justifier.
- 2) Placer les points correspondant aux valeurs du tableau sur le troisième repère ci-contre.



Hauteur du fuel en dm	0	2,5	5	7,5	10	12,5	15	20
Volume de fuel en litres	0	450	1230	2150	3140	4130	5050	6380

04 Quand le cylindre de l'exercice précédent est posé par terre sur sa base (verticalement), le fuel qu'il contient atteint une hauteur de 1,4 m. Quelle hauteur, au décimètre près, atteindra le fuel si on retourne la citerne à l'horizontale ?



II RECONNAÎTRE DES FONCTIONS LINÉAIRES ET AFFINES

05 Les fonctions suivantes sont-elles affines ? linéaires ? S'ils existent, préciser le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de ces fonctions.

- 1)** $f : x \mapsto 2x + 7$ **2)** $f : x \mapsto 3$ **3)** $f : x \mapsto 5x - 6$ **4)** $f : x \mapsto -5x + 3$
5) $f : x \mapsto 4 - 2x$ **6)** $f : x \mapsto -5x$ **7)** $f : x \mapsto x$ **8)** $f : x \mapsto x^2$
9) $f : x \mapsto -x$

06 Les fonctions suivantes sont-elles affines ? linéaires ? S'ils existent, préciser le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de ces fonctions.

- 1)** $f : x \mapsto \frac{2}{3}x$ **2)** $f : x \mapsto \frac{x}{5}$ **3)** $f : x \mapsto -x - 7$ **4)** $f : x \mapsto 2 + 3x$
5) $f : x \mapsto 3x^2 + 1$ **6)** $f : x \mapsto 2x$ **7)** $f : x \mapsto x + 7$ **8)** $f : x \mapsto 0,5x + 2$
9) $f : x \mapsto \frac{1}{3}x + 7$ **10)** $f : x \mapsto \frac{-x}{7} + \frac{1}{3}$ **11)** $f : x \mapsto \sqrt{2}x + \pi$

07 Pour chacun des programmes de calculs qui suivent, déterminer la fonction qui lui est associée. Préciser la nature de cette fonction, son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine s'ils existent.

- 1)** « Choisir un nombre. Le multiplier par 4 puis additionner 5 au résultat. »
2) « Choisir un nombre. Lui ajouter 6 puis le multiplier par 2. »
3) « Choisir un nombre. Le multiplier par lui-même puis lui soustraire 2. »
4) « Choisir un nombre. Le multiplier par 2 puis multiplier le résultat par 4. »
5) « Choisir un nombre. Lui ajouter 4. »

III CALCULS D'IMAGES PAR DES FONCTIONS LINÉAIRES ET AFFINES

08 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{2} - 2$

- 1)** Préciser la nature de cette fonction.
2) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.
3) Placer les points de coordonnées $(x; f(x))$ dans un repère.
4) Quelle semble être la nature de la représentation graphique de f ?

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$					

09 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{3x}{5} - 1$

- 1)** Préciser la nature de cette fonction.
2) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.
3) Placer les points de coordonnées $(x; f(x))$ dans un repère.
4) Quelle semble être la nature de la représentation graphique de f ?

x	-5	-3	0	1	2
$f(x)$					

10 Surligner les réponses valides ci-dessous, sachant qu'il peut y en avoir plusieurs, voire aucune.

La fonction $f : x \mapsto 3x - 4$ a pour représentation graphique une droite :	passant par le point $(0; -4)$	passant par le point $(2; -8)$	passant par le point $(1; -1)$
La fonction $f : x \mapsto 2x + 3$ et la fonction $g : x \mapsto 2x$:	ont le même coefficient directeur	ont la même ordonnée à l'origine	sont représentées par deux droites parallèles
Si les coefficients directeurs de deux fonctions sont égaux, alors les représentations graphiques de ces fonctions sont	des droites parallèles	des droites sécantes	des droites perpendiculaires
La fonction $f : x \mapsto \frac{-2x}{3} - 4$:	n'est pas une fonction affine	est une fonction linéaire	a pour coefficient directeur $\frac{-2}{3}$

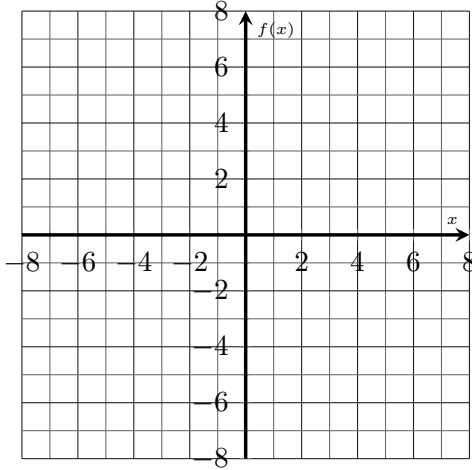
IV TRACER LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION AFFINE

CONSIGNES

Pour chacun des exercices qui suivent, tracer la représentation graphique de la fonction donnée.

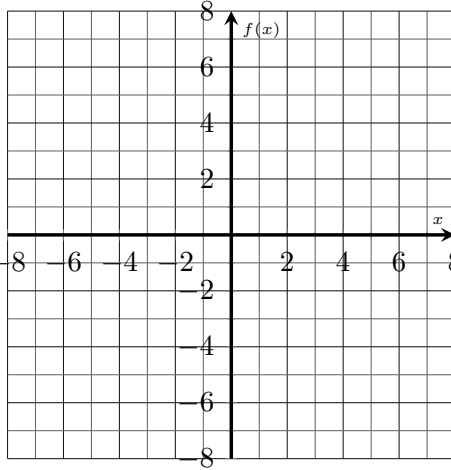
11

$$f : x \mapsto 3x.$$



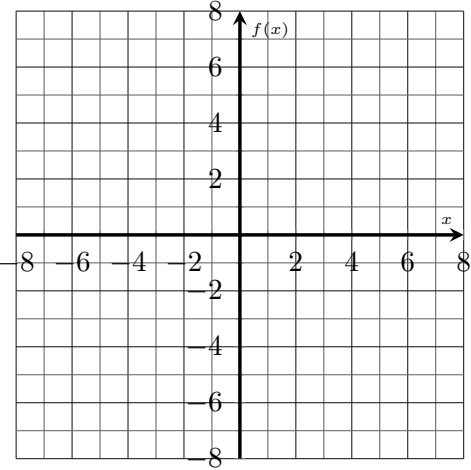
12

$$f : x \mapsto -2x$$



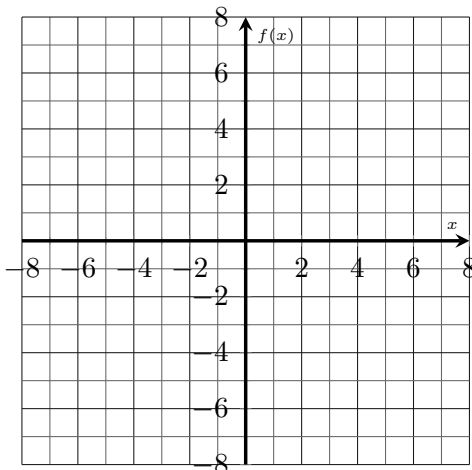
13

$$f : x \mapsto x + 5$$



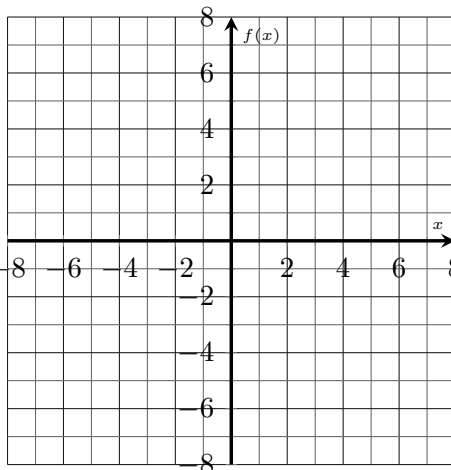
14

$$f : x \mapsto \frac{5}{2}x - 1.$$



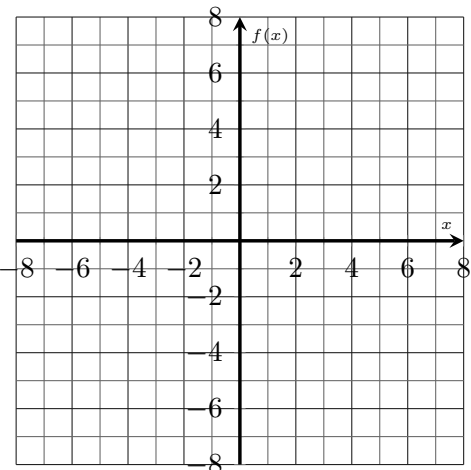
15

$$f : x \mapsto \frac{4}{3}x + 1.$$



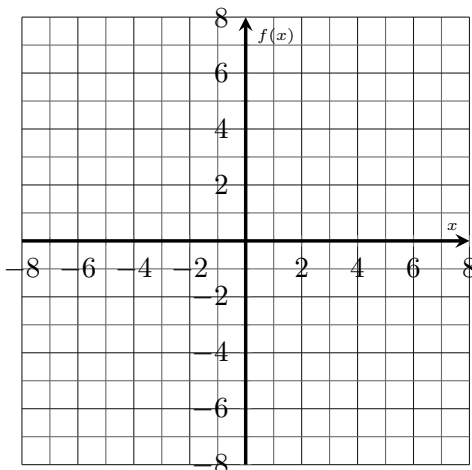
16

$$f : x \mapsto \frac{2}{3}x.$$



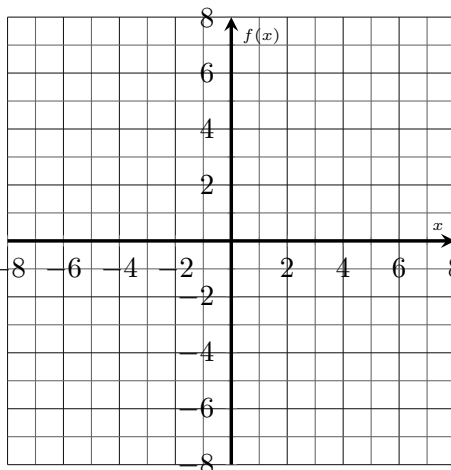
17

La fonction affine de coef. dir. 4 et d'ordonnée à l'origine -2.



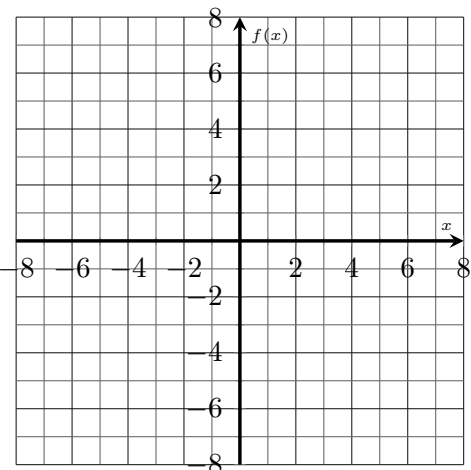
18

La fonction affine de coef. dir. -2 et d'ordonnée à l'origine 3.



19

La fonction affine de coef. dir. 0,5 et d'ordonnée à l'origine -3.

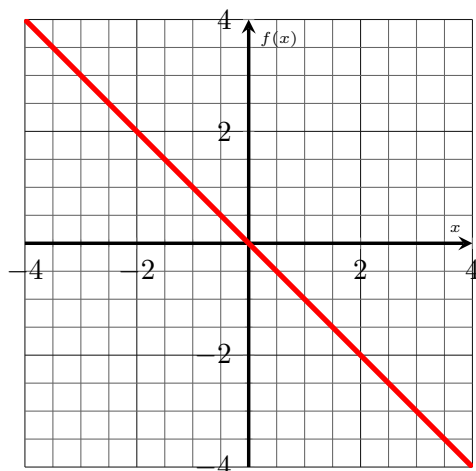


V DÉTERMINER UNE FONCTION AFFINE D'APRÈS SA REPRÉSENTATION

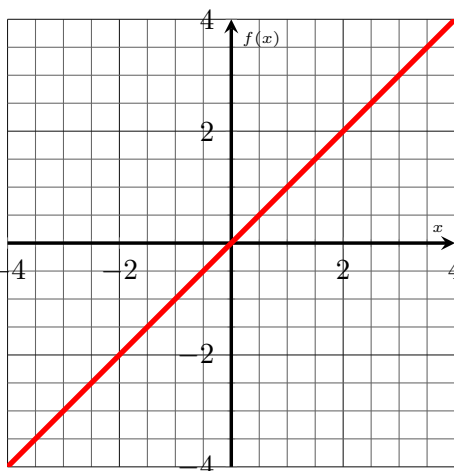
CONSIGNES

Pour chacun des exercices qui suivent, déterminer la fonction dont on a tracé la représentation graphique.

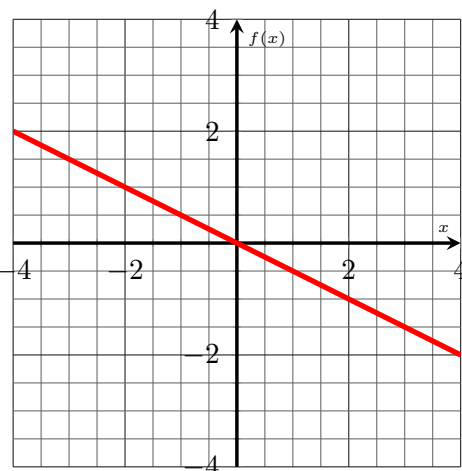
20



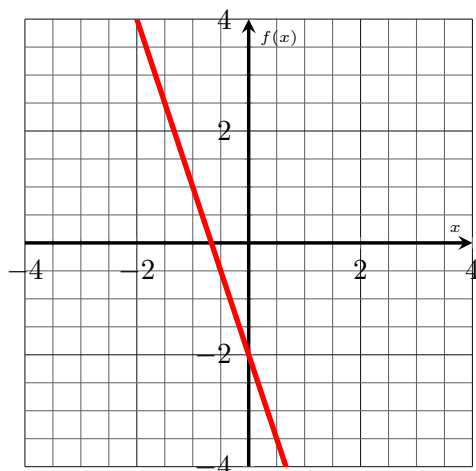
21



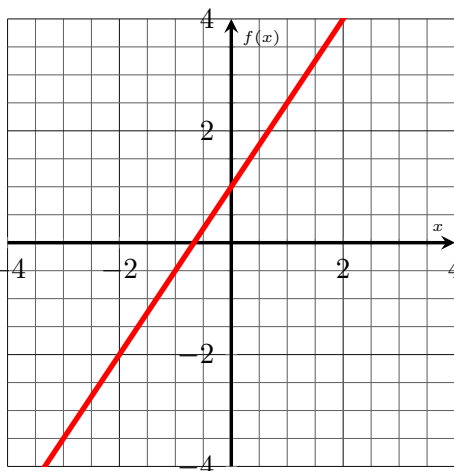
22



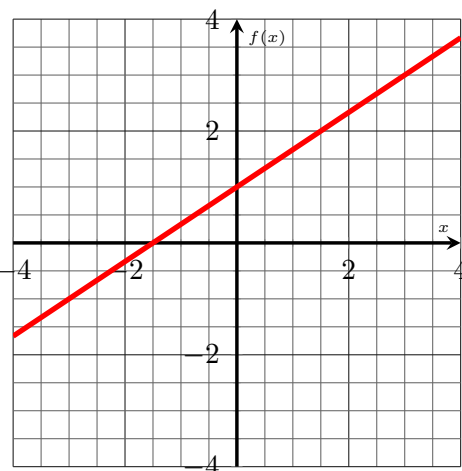
23



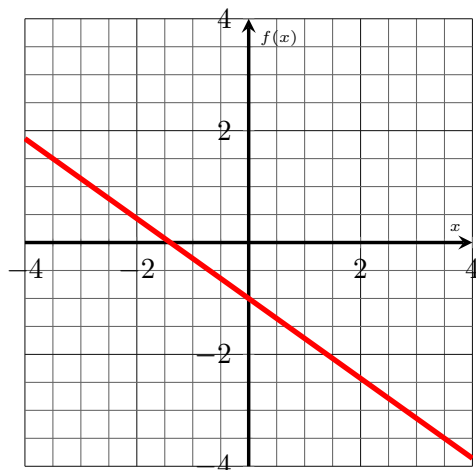
24



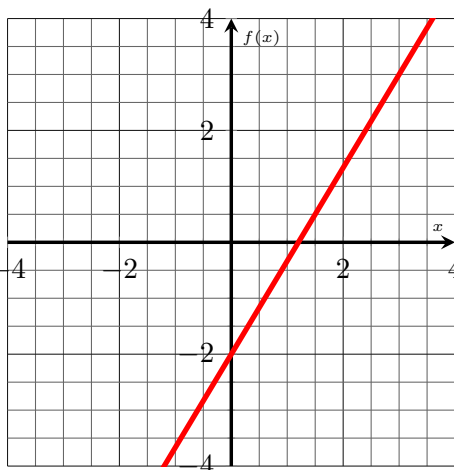
25



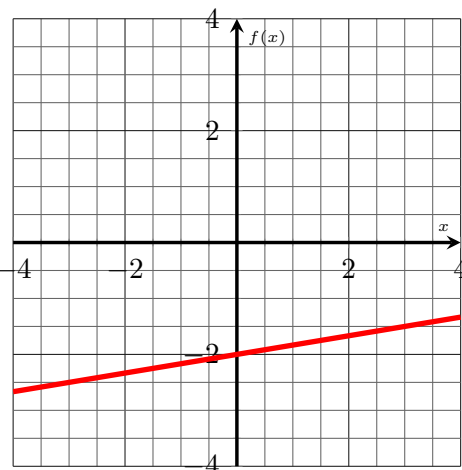
26



27



28



ACTIVITÉ INFORMATIQUE

29 Un cinéma propose les trois tarifs notés ci-contre :

- 1) Jean souhaite aller 6 fois au cinéma dans l'année.
Quel tarif devrait-il choisir ? Répondre dans le cahier en justifiant par des calculs.
- 2) Marie souhaite aller au cinéma une fois par mois dans l'année.
Quel tarif devrait-elle choisir ? Répondre dans le cahier en justifiant par des calculs.

- Tarif A : 9 € la séance de cinéma.
- Tarif B : achat d'une carte privilège coûtant 30 € et donnant droit à un tarif de 6 € à chaque séance.
- Tarif C : abonnement annuel de 120 € donnant droit à une entrée libre à chaque séance.

30 Répondre aux questions suivantes dans le cahier d'exercices.

- 1) On note maintenant x le nombre de séances de cinéma auxquelles on souhaite assister. Déterminer la fonction f_A qui au nombre x de séances associe la dépense occasionnée par le tarif A.
- 2) Quelle est la nature de la fonction f_A ? Préciser ses caractéristiques.
- 3) Déterminer la fonction f_B qui au nombre x de séances associe la dépense occasionnée par le tarif B.
- 4) Quelle est la nature de la fonction f_B ? Préciser ses caractéristiques.
- 5) Déterminer la fonction f_C qui au nombre x de séances associe la dépense occasionnée par le tarif C.
- 6) Quelle est la nature de la fonction f_C ? Préciser ses caractéristiques.



31 On va maintenant représenter graphiquement les fonctions précédentes.

- 1) Pour cela :
 - Ouvrir le fichier GeoGebra en cliquant ou en scannant le QR-code ci-contre.
 - Pour obtenir la représentation graphique de f_A , entrez la formule « $9x$ » dans la barre de saisie de GeoGebra.
 - Colorier la droite obtenue en bleu.
 - Tracer également les représentations graphiques des fonctions f_B et f_C en les coloriant respectivement en vert et en rouge.
- 2) Recopier les trois représentations graphiques dans le cahier d'exercices.
- 3) Sur la figure GeoGebra et dans le cahier, indiquer avec des pointillés le nombre de séances pour lequel le tarif A est égal au tarif B. Quel est alors le montant de la dépense ?
- 4) Vérifier votre réponse à l'aide d'une équation.
- 5) Sur la figure GeoGebra et dans le cahier, indiquer avec des pointillés le nombre de séances à partir duquel le tarif C devient plus profitable que les deux autres.
- 6) Vérifier votre réponse à l'aide d'une inéquation.
- 7) Dans le cahier d'exercices, résumer le choix des tarifs en fonction du nombre de séances.

ACTIVITÉ INFORMATIQUE

CONSIGNES

- On donne dans le tableau ci-contre les formules pour le calcul de la part des frais, en euros, déductibles des impôts lors de l'utilisation d'un véhicule pour raison professionnelle.
- La colonne « CV » désigne la puissance du véhicule. La lettre d désigne la distance, exprimée en km, parcourue pendant une année avec cette voiture.

CV	$0 \text{ km} \leq d \leq 5\,000 \text{ km}$	$5\,000 \text{ km} < d \leq 20\,000 \text{ km}$	$d > 20\,000 \text{ km}$
3	$0,405 \times d$	$0,242 \times d + 818$	$0,283 \times d$
4	$0,487 \times d$	$0,274 \times d + 1063$	$0,327 \times d$
5	$0,536 \times d$	$0,3 \times d + 1180$	$0,359 \times d$
6	$0,561 \times d$	$0,316 \times d + 1223$	$0,377 \times d$
7 et plus	$0,587 \times d$	$0,332 \times d + 1278$	$0,396 \times d$

36 Répondre aux questions suivantes en écrivant les calculs dans le cahier d'exercices :

- Vérifier que si l'on parcourt 1000 km avec une voiture de puissance 5 CV, on peut alors déduire 536 €.
- Calculer les frais pour l'utilisation d'une voiture de 6 CV qui a parcouru 4 000 km.
- Calculer les frais pour l'utilisation d'une voiture de 3 CV qui a parcouru 6 000 km.
- Calculer les frais pour l'utilisation d'une voiture de 9 CV qui a parcouru 25 000 km.
- Baptiste a une voiture de 4 CV. Or il a déclaré 3 118 € de frais. Quelle distance a-t-il parcourue ?

37 Dans cet exercice, on s'occupe d'une voiture de puissance 7 CV. Répondre aux questions suivantes.

- Déterminer la fonction f_1 qui à la distance d comprise entre 0 km et 5 000 km associe le montant des frais en euros. Est-ce une fonction linéaire ? affine ?
- Déterminer la fonction f_2 qui à la distance d comprise entre 5 001 km et 20 000 km associe le montant des frais en euros. Est-ce une fonction linéaire ? affine ?
- Déterminer la fonction f_3 qui à la distance d supérieure à 20 000 km associe le montant des frais en euros. Est-ce une fonction linéaire ? affine ?

38 Ouvrir le fichier GeoGebra en cliquant ou en scannant le qr-code ci-contre.



- Afin de tracer la courbe représentative de la fonction f_1 , on va placer sur le repère de GeoGebra le point $(0; f_1(0))$ et le point $(5\,000; f_1(5\,000))$. Pour cela :
 - Dans la barre de saisie de GeoGebra, entrez « $A=(0,0*0.587)$ ». Attention, sur GeoGebra, « 0,587 » s'écrit « 0.587 » (notation anglo-saxonne : un point remplace la virgule)
 - Faire de même afin d'obtenir le point B de coordonnées $(5\,000; f_1(5\,000))$.
 - Tracer en bleu le segment [AB] en entrant « Segment(A,B) » dans la barre de saisie.
- Placer de même les points $(5\,000, f_2(5\,000))$ et $(20\,000, f_2(20\,000))$ afin de tracer la courbe représentative de la fonction f_2 . Tracer en rouge le segment joignant ces deux points.
- Placer de même les points $(20\,000, f_3(20\,000))$ et $(30\,000, f_3(30\,000))$ afin de tracer la courbe représentative de la fonction f_3 . Tracer en vert le segment joignant ces deux points.
- Recopier les trois représentations graphiques dans le cahier d'exercices.

39 Jean a une voiture dont la puissance fiscale est de 7 CV. Il a parcouru environ 20 000 km. Quel gain obtiendrait-il en déclarant 20 001 km plutôt que 20 000 km ? Justifier dans le cahier d'exercices.

SÉANCE AP

Ex 01 Un site internet de téléchargement de films propose trois modes de paiement :

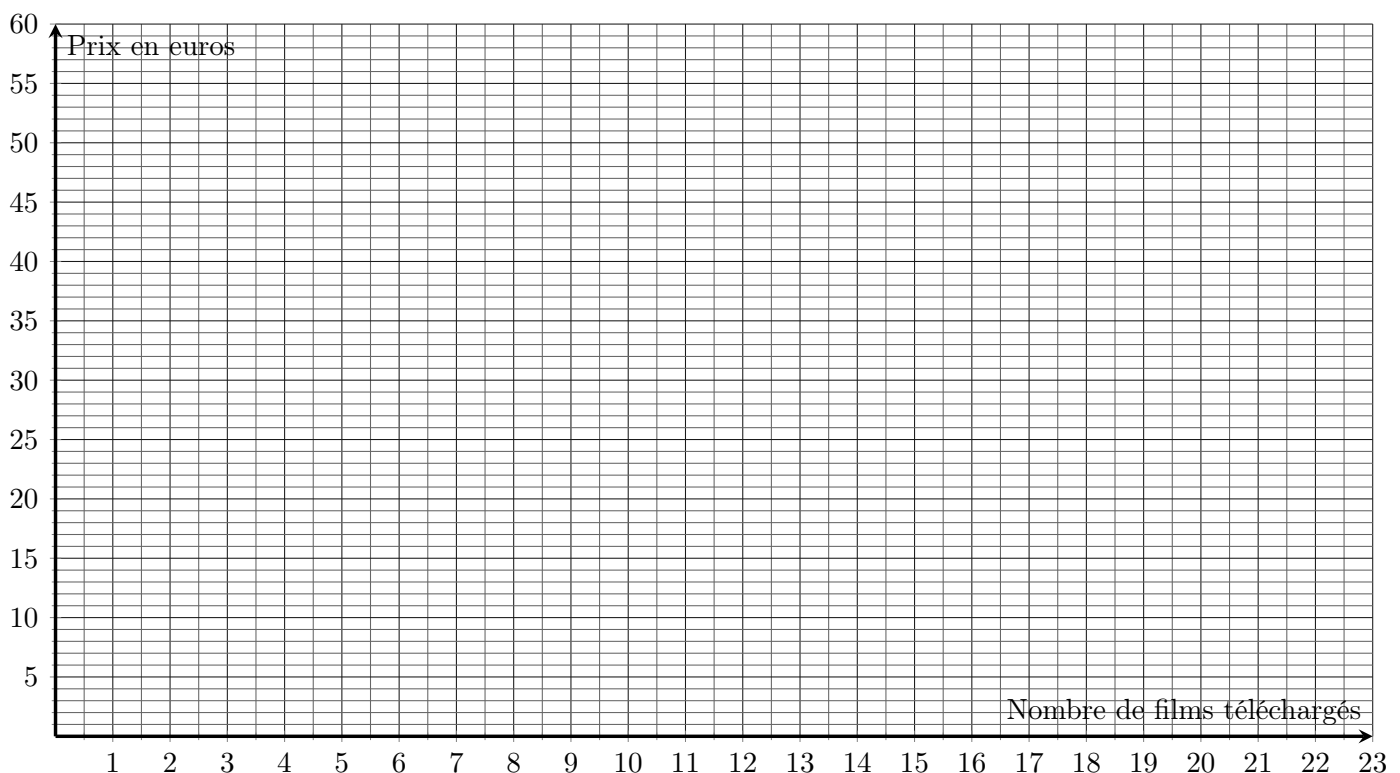
- Le téléchargement **direct sans inscription** : avec ce mode, chaque film peut être téléchargé pour 4 euros l'unité.
 - Le téléchargement « membre » nécessite une inscription à 10 euros valable pendant un mois et permettant de télécharger chaque film au prix de 2 euros l'unité.
 - L'abonnement « *premium* ». On paye une inscription à 50 euros permettant de télécharger tous les films gratuitement pendant un mois.
- 1) On souhaite télécharger un seul film durant le mois. Quel est le choix le moins cher ?
- 2) Compléter le tableau ci-dessous.

Nombre de films téléchargés par mois	1	2	5	10	15
Prix en euros pour le téléchargement « direct »					
Prix en euros pour le téléchargement « membre »					
Prix en euros pour le téléchargement « <i>premium</i> »					

- 3) À partir de combien de films devient-il plus intéressant de choisir la formule « membre » ? Justifier à l'aide d'une inéquation.
- 4) À partir de combien de films devient-il plus intéressant de choisir la formule « *premium* » ? Justifier à l'aide d'une inéquation.

Ex 02 Dans cet exercice, x désigne le nombre de films téléchargés. On considère les trois fonctions suivantes : $f : x \mapsto 50$, $g : x \mapsto 4x$ et $h : x \mapsto 2x + 10$.

- 1) Associer chacune de ces fonctions à la formule de paiement qu'elle représente (direct, membre ou premium).
- 2) Déterminer la nature de chacune de ses fonctions et préciser ses caractéristiques.
- 3) Dans le repère ci-dessous, tracer les droites représentant les fonctions f , g et h .
- 4) Utiliser le graphique pour vérifier vos réponses à l'exercice précédent.





ALGORITHMES ET FONCTIONS

CONSIGNES

- 1) Téléchargez le fichier *Scratch* en cliquant [ici](#).
- 2) Ouvrir l'application *Scratch* en cliquant [ici](#).
- 3) Chargez le fichier Scratch téléchargé à la question précédente. Si besoin, regarder la vidéo d'aide en cliquant [ici](#).

41

- 1) Dans *Scratch*, cliquer sur le drapeau vert pour lancer le programme. Observer et décrire dans votre cahier d'exercices ce que fait ce programme.
- 2) Sachant que l'unité par défaut de *Scratch* est le pixel (point d'écran), préciser, dans le cahier d'exercices, l'unité de graduation des deux axes.
- 3) Modifier le programme pour que le repère soit gradué tous les 20 pixels sur l'axe des abscisses et tous les 30 pixels sur l'axe des ordonnées. Faire une photo d'écran de votre programme et du graphique obtenu et les inclure dans un document *Libre Office*.
- 4) Modifier le programme afin qu'il trace la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 3x - 60$. Faire une photo d'écran de votre programme et du graphique obtenu et les glisser dans votre document *Libre Office*.
- 5) Modifier le programme afin qu'il trace la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{2}$. Faire une photo d'écran de votre programme et du graphique obtenu et les glisser dans votre document *Libre Office*.

42

- 1) Dans *Scratch*, recharger le programme initial.
- 2) On veut maintenant ajouter à la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto -2x + 30$ celle de la fonction $g : x \mapsto 2x - 10$. Ajouter la partie nécessaire au programme pour qu'il trace en plus, en bleu, la représentation graphique de la fonction g .
- 3) Faire une photo d'écran du programme et du graphique obtenu, et les inclure dans votre document *Libre Office*.
- 4) Convertir votre feuille en document .pdf et me l'envoyer le document à l'adresse suivante : erdrichmaths@gmail.com.

Attention, je ne regarderai les documents que s'ils sont envoyés sous la forme .pdf.